VISIT…

LANZAROTE
Caliente.com

REVERSIBILITY AND ARROW OF TIME: BETWEEN ORDER AND CHAOS
Part II. Dynamical aspect

L. I. MANEVICH

In the first part of the article it has been outlined that the macroscopic physics together with experimental data impels the way out beyond the frameworks of reversible description. In the second part the dynamical aspect and the conclusions which are consequence of chaotization of trajectories in the conservative mechanical systems, are described.

В первой части статьи было показано, каким образом макроскопическая физика континуума наряду с экспериментальными фактами побуждает выйти за пределы обратимого описания, характерного для консервативной динамики и фундаментальных областей микроскопической физики. Во второй части рассмотрен динамический аспект проблемы и те выводы, к которым приводит возможная хаотизация траекторий в консервативных механических системах.

© Маневич Л.И., 1997

ОБРАТИМОСТЬ И СТРЕЛА ВРЕМЕНИ: МЕЖДУ ПОРЯДКОМ И ХАОСОМ
Часть II. Динамический аспект

Л. И. МАНЕВИЧ

Московский физико-технический институт, Долгопрудный Московской обл.

СТРЕЛА ВРЕМЕНИ КАК СЛЕДСТВИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

Первые успехи статистической механики, рассматривающей в качестве исходных предпосылок законы микроскопической динамики, были связаны с использованием далеких от механики вероятностных соображений. Теория вероятности зародилась еще в конце XVII века главным образом усилиями братьев Бернулли, практически одновременно с динамикой Ньютона как средство предсказания результатов событий, подобных падению подброшенной игральной кости. Подбрасываемая кость совершает чисто механическое движение, которое должно быть подвластно описанию на языке обратимых дифференциальных уравнений классической механики. Считалось само собой разумеющимся, что при достаточно точном задании начальных условий такое описание имело бы предсказательную силу. Случайность же, противостоящая детерминизму и отражаемая в использовании теории вероятностей, представала как результат неполного знания, следствием чего и является возможность предсказания лишь результатов массовых испытаний.

П.С. Лаплас, отчетливо сформулировавший концепцию детерминизма, внес существенный вклад и в теорию вероятностей. Однако вероятностный подход к динамическим явлениям ни в коем случае не рассматривался как фундаментальный.

Проникновение теории вероятности в физику произошло в то время, когда атомно-молекулярное строение вещества не было еще твердо установлено и феноменологическая точка зрения, основанная на континуальных представлениях, многими исследователями воспринималась как последнее слово теории. Тем большего признания заслуживает вклад Дж. Максвелла, Л. Больцмана и У. Гиббса, сформулировавших и далеко продвинувших проблему установления связи между макроскопическим поведением вещества и динамикой составляющих его тогда еще гипотетических молекул.

Для Больцмана, посвятившего этой проблеме всю жизнь, руководящей идеей была, по-видимому, аналогия между временной эволюцией динамической системы и процессами, подобными, например,

тасовке карт. Тасовка, начинающаяся с упорядоченного расположения карт от низших к высшим (или наоборот) в каждой масти (существует только 48 различных возможностей такого распределения), приводит к неупорядоченной колоде. Вероятность возвращения к упорядоченному расположению не равна нулю, но ничтожно мала. Больцман как раз и пытался истолковать понятие энтропии на языке теории вероятностей, считая, что эволюция механической системы в каком-то смысле напоминает формирование беспорядка (рост числа неупорядоченных распределений) при тасовке карт или, например, при размытии первоначально сконцентрированной в малом объеме жидкости капли чернил. Энтропия при этом выступает как мера числа доступных состояний (рост занимаемого каплей чернил объема в стакане воды), которая возрастает по мере эволюции системы, достигая в пределе максимума [4]. Достижение этого предела означает завершение эволюции и переход в состояние термодинамического равновесия, в котором, несмотря на сложную микроскопическую динамику, макроскопических изменений уже нет. Но возникновение стрелы времени, то есть практическая недостижимость обратимости, обусловлено здесь статистическим подходом.

Действительно, использование статистики требует множественности событий, то есть приготовления, хотя бы мысленного, некоторой совокупности (ансамбля) молекулярных систем или колод карт. Тогда выясняется, что обратимость (возвращение в исходное или весьма близкое к нему состояние) не запрещена, хотя и крайне маловероятна. Стрела времени в этом контексте не более чем иллюзия, навязанная вероятностным способом описания. Поэтому и нет противоречия с микроскопической обратимой динамикой.

Предположения, при которых справедлив вывод Больцманом необратимого уравнения эволюции (возрастания энтропии) разреженного газа, были прояснены в начале века работой П. и Т. Эренфестов. Стало ясно, что у Больцмана речь идет о так называемом крупнозернистом статистическом усреднении, которое только и делает возможным определение энтропии в неравновесных условиях и выражает наше незнание истинной микроскопической ситуации.

В первой части статьи мы отмечали, что необратимая термодинамика допускает разумное обоснование только при использовании гипотезы о локальном равновесии (континуум предполагается состоящим из элементарных областей, где выполняются условия термодинамического равновесия). При этом в полной системе возможны неравновесные процессы. Подход Больцмана, развитый Д. Мейкснером, И. Пригожиным, Х. Рейком, позволяет оценить пределы применимости этой гипотезы [1–3]. Оказывается, что локальное равновесие существует и в системах, весьма далеких от равновесия. Элементы объема одноатомного газа допустимо считать равновесными малыми областями, если изменения температуры и скорости на расстоянии порядка длины свободного пробега малы по сравнению с абсолютной температурой и скоростью звука соответственно. Расчет показывает, что газ в нормальном состоянии можно рассматривать как локально равновесный вплоть до температурных градиентов порядка ста тысяч градусов на один сантиметр. Если исключить быстрые процессы, столь слабое ограничение заведомо выполняется и использование классических термодинамических величин вполне оправданно.

В то же время расчет, выполненный М. Смолуховским, показывает, что для флуктуаций в воздухе при 300 К и плотности $3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ среднее время между флуктуациями на 1% от среднего числа молекул в шаре радиусом $5 \cdot 10^{-5}$ см равно примерно 10^{68} с, или $3 \cdot 10^{60}$ лет. Но если мы уменьшим радиус этого шара всего в 5 раз, то есть до 10^{-5} см, то среднее время между 1%-ными флуктуациями уменьшится до 10^{-11} с. Иначе говоря, при недостаточно грубом описании, то есть недостаточно большом объеме зерна, теряется однонаправленность времени, если связывать его с увеличением беспорядка. Ведь возникновение флуктуаций есть по сути нарушение стремления к беспорядку, то есть упорядочение. Только при достаточно крупнозернистом описании из-за больших времен ожидания флуктуации (по сравнению с разумными временами наблюдения) этим эффектом можно пренебречь и статистическая необратимость может торжествовать. Отсюда следует, что подход Больцмана, развитый и многими его последователями, не решает принципиально проблему необратимости. Хорошо известно, насколько трагичным для Больцмана (покончившего жизнь самоубийством) было осознание этого факта в полемике с ведущими учеными конца XIX – начала XX века [4]. По странному стечению обстоятельств его судьба постигла позднее и П. Эренфеста, внесшего вслед за Больцманом важный вклад в проблему.

Однако вероятностная интерпретация молекулярных процессов стала одним из переломных моментов в истории физики и естествознания. Она предполагает наличие ансамбля многих идентичных систем, на котором только и могут разыгрываться статистические события. Теория ансамблей была далеко продвинута Дж.У. Гиббсом [1–3], вскрывшим вероятностную природу состояния термодинамического равновесия. Переход на язык ансамблей сам по себе не означает разрыва с ньютоновской концепцией. Если начальные данные точно известны, то вероятность обнаружения механической системы на ее ньютоновской траектории равна 1, всем же остальным мыслимым траекториям соответствуют вероятности, равные 0. И все же между обратимым движением планет в небесной механике и необратимым хаотическим движением атомов и молекул

существует пропасть, хотя и те и другие подчиняются динамическим уравнениям Ньютона.

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

В чем внутренний смысл этой пропасти с точки зрения динамики? Поразительно, что только во второй половине нашего века стал проясняться ответ на этот вопрос, хотя предпосылки для него были заложены еще в конце прошлого века одной теоремой Пуанкаре. Он показал, что при любом числе степеней свободы консервативные механические системы, как правило, не имеют сохраняющихся величин (интегралов движения), кроме самой полной энергии, то есть суммы кинетической и потенциальной энергий (сохранение импульса и момента импульса является тривиальным фактом, если система не смещается и не вращается как целое). В таком случае совокупность координат и скоростей всех частиц системы удовлетворяет лишь одному алгебраическому соотношению – закону сохранения полной механической энергии, или, как говорят, все траектории в пространстве координат и скоростей (фазовом пространстве) лежат на изоэнергетической поверхности. Последняя имеет размерность на единицу меньшую, чем $6N$, где N – число частиц в системе, а $6N$ – количество их координат и скоростей. Но, как было выяснено еще до Пуанкаре, чтобы уравнения движения консервативной системы были точно разрешимы, сохраняющихся величин вместе с полной энергией должно быть $3N$ и они должны удовлетворять некоторым условиям, обеспечивающим их независимость (теорема Лиувилля) [1–3]. Каждая сохраняющаяся величина соответствует некоторому свойству симметрии, присущему системе. Сохранение энергии есть следствие однородности времени. Следовательно, согласно теореме Пуанкаре, какие-либо другие, внутренние симметрии в консервативных динамических системах отсутствуют. Точно решаемые задачи оказываются при этом редчайшими исключениями. Но что же в конце концов означает невозможность точного решения?

На первый взгляд тот факт, что локальные законы движения формулируются в виде дифференциальных уравнений, определяющих будущее механической системы исходя из заданных начальных условий, обеспечивает регулярное и далекое от хаотичности поведение. В самом деле, последовательные состояния непрерывно развиваются одно из другого. Но сопоставление двух, казалось бы, близких примеров позволяет увидеть более глубокий аспект проблемы. В качестве одного из этих примеров рассмотрим свободное движение точечной массы по удовлетворяющей некоторым специальным условиям поверхности отрицательной кривизны (представление о поверхности отрицательной кривизны дает гиперболоид).

Аналогичная задача для поверхности положительной кривизны – эллипсоида была изучена еще в прошлом веке и долгое время была одной из немногих точно решенных задач классической механики. В этом последнем случае отклонение близких (то есть соответствующих близким начальным условиям) траекторий от данной по нормали ведет себя как отклонение шарика от дна ямы при малых возмущениях. Ясно, что при этом малые отклонения останутся малыми во все время движения (устойчивый случай). Для движения же по рассматриваемой поверхности отрицательной кривизны аналогичная величина ведет себя как отклонение шарика от вершины горба. Это неустойчивый случай, и близкие траектории будут, как оказывается, экспоненциально (со временем) уходить от данной, то есть мы получаем так называемую экспоненциальную неустойчивость. В.И. Арнольд [5] приводит такой пример: при кривизне поверхности порядка -4 м$^{-2}$ ошибка в десятую долю миллиметра в определении начального положения точечной массы очень скоро скажется в виде метровых отклонений траекторий. При этом почти каждая из траекторий всюду плотно заполняет трехмерную изоэнергетическую поверхность, задаваемую законом сохранения энергии в четырехмерном пространстве координат и скоростей. В случае же эллипсоида траектория может плотно заполнять лишь двумерную поверхность, поскольку в таком случае наряду с интегралом энергии существует еще одна сохраняющаяся величина. Мы понимаем теперь, что из-за экспоненциального характера нарастания ошибок ход траектории на поверхности отрицательной кривизны практически невозможно спрогнозировать. Это свойство в данном случае обусловлено принципиальной невозможностью абсолютно точного задания начальных условий. Они всегда будут отличаться от расчетных значений, причем каждый раз по-иному. При любой ошибке в начальных условиях предсказуемость исчезает, хотя движение точечной массы определяется вполне детерминистическими уравнениями.

ХАОТИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ И ЧИСЛОВОЙ КОНТИНУУМ

Чем же хаотическая траектория как таковая, всюду плотно заполняющая в данном случае трехмерную изоэнергетическую поверхность, принципиально отличается от регулярной траектории точечной массы, движущейся по эллипсоиду и плотно заполняющей только двумерную поверхность?

Разделим мысленно изоэнергетическую поверхность на конечное множество неперекрывающихся пронумерованных ячеек. Тогда оказывается, что в случае эллипсоида номера ячеек, в которые попадает точка, характеризующая состояние системы через выбранные равные промежутки времени, образуют регулярную последовательность, например повторяются через один или несколько периодов

при периодическом движении. Для поверхности отрицательной кривизны мы не увидим никакой регулярности, то есть по уже известным за предыдущие моменты времени номерам ячеек мы никак не сможем предсказать последующие номера. Иначе говоря, вся траектория определяется лишь заданием полной последовательности номеров ячеек. Сколько бы измерений с любой конечной точностью мы ни проводили, их результаты будут выглядеть как случайные, то есть неотличимые по своему характеру от тех данных, которые мы получаем, скажем, при бросании игральной кости, и, значит, можно лишь говорить о вероятностях переходов от одного номера ячейки к другому. Очевидно, это не связано с недостаточно малым размером ячеек, ведь в случае эллипсоида регулярность выпадающих номеров и, следовательно, предсказуемость имеют место.

Если представить последовательно выпавшие номера ячеек в случае хаотической траектории в виде числа, записанного, например, в двоичной системе, то возникает уже чисто математическая проблема: можно ли дать строгое определение случайного расположения единиц и нулей? В последние десятилетия усилиями А.Н. Колмогорова, Г. Шайтина, Р. Соломона, П. Мартин-Лефа, которые ввели понятие сложности n-значной и бесконечнозначной последовательностей, эта проблема была решена. Под сложностью понимается длина в битах $K^{(n)}$ самой короткой программы, способной обеспечить выдачу на печать данной последовательности. Так, в случае n единиц это будет программа

for $i = 1$ to n do Print 1 next.

При больших n получаем сложность порядка логарифма n. Тогда случайная последовательность отождествляется с набором единиц и нулей, который не может быть предсказан с помощью алгоритма с длиной (в битах), меньшей длины самой последовательности. Это близко к определению так называемых невычислимых чисел, для которых нет более простого способа указать последовательность нулей и единиц, нежели предъявить точные их копии. Чтобы обобщить понятие сложности на бесконечные последовательности, пришлось рассматривать не саму величину $K^{(n)}$, а предел при $n \longrightarrow \infty$ ее отношения к длине строки n. Таким путем исключается влияние возможных колебаний $K^{(n)}$. Тогда большие конечные неслучайные последовательности имеют сложность, равную нулю, а случайные, называемые максимально сложными – отличную от нуля. Тем самым понятие случайной последовательности как максимально сложной становится точно определенным. Более того, почти все последовательности оказываются случайными. Использование таких последовательностей становится абсолютно необходимым, если мы собираемся применять ньютоновские уравнения движения для точного определения неустойчивых, хаотических траекторий, когда всякая начальная неопределенность в задании координат и скоростей экспоненциально растет со временем [6]. Для устойчивых траекторий последовательности цифр обладают той регулярностью, которая позволяет восстанавливать их с помощью простых программ (сложность порядка 0), а ошибка в начальных условиях не усугубляется в процессе движения.

Отсюда следуют важные выводы и математического, и физического характера. С точки зрения математики оказывается, что числовой континуум, если говорить о возможности его конструктивного задания, доступен разве что Богу. Физика – человеческое предприятие, и требование бесконечной точности ей не подходит. Фактически оно может быть принято как допущение (асимптотика) в тех случаях, как оказывается редких, когда в действительности бесконечная точность не нужна (случай регулярных, устойчивых траекторий). Только здесь введение отдельных траекторий приобретает смысл, а допущение о принципиальной возможности сколь угодно точного задания начальных условий не противоречит реальности, позволяя в то же время использовать мощный аппарат классической механики.

ХАОТИЗАЦИЯ И ПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ

Крах ньютоновской программы в случае хаотических траекторий не означает невозможности предсказания вообще. Но выход из положения связан с переходом, причем вынужденным, от индивидуальных траекторий к ансамблям. Точка зрения Максвелла–Больцмана–Гиббса, предусматривающая, как теперь ясно, “крупнозернистое описание”, становится разумной альтернативой динамике, если траектории хаотичны. Замечательно, что этот вывод не зависит от числа степеней свободы, ведь долго считалось, что хаотичность – привилегия только больших систем, которые выделяет высокая степень недостатка информации из-за принципиальной невозможности точного знания состояний макроскопической среды или внешнего шума.

Развитие событий в последние десятилетия дало неожиданное опровержение этого взгляда и с другой стороны. Оказалось, что некоторые бесконечномерные (континуальные) динамические системы имеют только регулярные траектории. Эти результаты тесно связаны с теорией солитонов и подробно обсуждаются в статье [7]. Возникает естественный вопрос: как часто встречаются системы с хаотическим поведением траекторий? Можно ли проследить переход от регулярного поведения к хаотическому и наоборот?

МЕЖДУ ПОРЯДКОМ И ХАОСОМ

На одном полюсе находится узкий, но чрезвычайно важный для физических приложений класс точно решаемых систем, конечно- и бесконечномерных. Высокая степень внутренней симметрии, имеющая следствием наличие нужного для точной

разрешимости числа сохраняющихся величин, позволяет некоторым преобразованием устранить в этих системах взаимодействие. Иначе говоря, можно выбрать такую точку зрения, что подобная система предстает как совокупность независимых подсистем.

Далее выделяется класс систем, близких к точно решаемым. Теория Колмогорова–Арнольда–Мозера показывает, что при возмущении точно решаемой консервативной системы упорядоченное поведение поначалу сохраняется, затем на изоэнергетической поверхности появляются области хаотического поведения, которые при дальнейшем возрастании возмущения становятся доминирующими. Часто при этом речь идет об окрестности устойчивого положения равновесия, близость к которому характеризуется параметром, отражающим малость отклонения от стационарной точки. Тогда в первом приближении (при пренебрежении всеми нелинейными членами) система оказывается линейной и, следовательно, точно разрешимой, а трансформация траекторий при удалении от точки равновесия решающим образом зависит от существования резонансных соотношений между частотами линеаризованной системы. Если резонансы вообще отсутствуют, то некоторым преобразованием, которое можно рассматривать как процедуру усреднения [8], исходная система точно линеаризуется в фазовом пространстве, то есть приводится в окрестности устойчивого равновесия к точно решаемой. Оказывается, что и в общем случае можно выполнить подобное преобразование, которое, однако, лишь приближенно заменит возмущенную систему точно решаемой. При наличии резонансов подобным преобразованием исключить нелинейные члены не удается и взаимодействие между подсистемами, усиливающееся с удалением от равновесной точки, становится неустранимым. В случае единственного резонанса такое взаимодействие имеет следствием только повышение размерности подпространства, в котором находится регулярная траектория. Однако при наличии многих резонансов становится возможной хаотизация траекторий, то есть переходы между резонансами или “блуждание по резонансам”. При этом могут сохраняться и регулярные траектории.

Наконец, на втором полюсе находятся полностью хаотические системы, примером которых может служить материальная точка, совершающая свободное движение по поверхности отрицательной кривизны.

Очень важно представлять себе, к какому классу из перечисленных выше принадлежит та или иная модель теоретической физики. Одним из неожиданных открытий последних десятилетий стало обнаружение того, что многим нелинейным моделям гидродинамики, электродинамики, физики твердого тела, общей теории относительности, физики плазмы, физики атомного ядра и физики элементарных частиц соответствуют точно разрешимые уравнения с регулярными траекториями, допускающие решения солитонного типа.

К тому же хаотические траектории обнаруживаются в самой “цитадели” детерминизма – небесной механике. Если вспомнить теорему Пуанкаре, то это неудивительно, так как задачи о гравитационно взаимодействующих массах, как правило, точно неразрешимы. Следует скорее удивляться тому, как много порядка наблюдается в движениях галактик. Анализ их простейших моделей показывает (Ф. Верхалст), что в этом случае дискретные симметрии, подобные зеркальному отражению и характерные для ряда типичных галактик, могут значительно уменьшить роль резонансов и тем самым сузить область хаотических движений. В то же время в реалистичных моделях газов, жидкостей, твердых тел хаотические траектории должны быть типичными, чтобы методы статистической механики были к ним применимы. В случае газа подтверждением этого может служить хаотичность модели сталкивающихся шаров в ящике (Я.Г. Синай).

Для твердых тел, когда существует устойчивое положение равновесия, речь может идти о хаотизации из-за блужданий по резонансам. При этом важно, что вследствие макроскопических размеров твердого тела число таких резонансов может быть очень большим. Тем не менее иногда хаотизация из-за высокой симметрии системы оказывается невозможной. Приведем один пример, который показателен в этом отношении. Он наглядно демонстрирует, как в больших системах, с одной стороны, может доминировать регулярное поведение, а с другой – при некотором возмущении происходит хаотизация динамических траекторий.

Рассмотрим одномерную модель кристалла, атомы которого испытывают отталкивание, возрастающее по мере сближения атомов, и притяжение, ослабляющееся по мере их удаления один от другого. Можно убедиться в том, что и при малых и при больших возмущениях соответствующая динамическая система близка к точно решаемой: при малых возмущениях она может быть описана в хорошем приближении континуальным уравнением Кортевега–де-Фриса, а при больших фактически эквивалентна системе сталкивающихся твердых шаров на прямой. Оказывается, что при равных величинах масс атомов в такой модели невозможно наблюдать процессы, подобные теплопроводности. Причиной является высокая ее симметрия как в случае малых, так и в случае больших возмущений, приводящая к существованию бесконечного числа законов сохранения. Как следствие в такой системе могут распространяться солитонные возбуждения. Если мы нагреем один край цепочки, то вместо медленного процесса распространения тепла получим сверхзвуковое распространение солитонов сжатия,

переносящих энергию нагретой части кристалла на другой его край без размывания тепловой энергии по кристаллу. Мы видим, что и в бесконечномерной системе высокая симметрия становится непреодолимым препятствием на пути хаотизации, которая только и может обеспечить на макроскопическом уровне нормальную теплопроводность. Но как только мы начнем изменять соотношение масс, солитонные возбуждения становятся все более и более чувствительными к различного рода возмущениям. Если это отношение достигает величины, равной двум, то солитонные возбуждения вообще не могут распространяться и, напротив, закон Фурье тогда выполняется, равно как и все закономерности, характерные для теплопроводности [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы кратко очертили путь, который прошла теоретическая физика, пытаясь осмыслить связь между обратимостью на микроскопическом уровне и макроскопической необратимостью. Здесь были и личные трагедии, и неожиданные прозрения. Временами казалось, что ответ уже ясен, но каждый раз дальнейший ход событий обнаруживал новые, зачастую неожиданные аспекты этой проблемы. В последние десятилетия выявлена глубокая ее связь с представлениями о структуре числового континуума. Мы оставили в стороне многие важнейшие вопросы, связанные с конструктивной, самоорганизующей ролью необратимости, весьма актуальной как для физических, так и для химико-биологических процессов. Но эта тема заслуживает специального обсуждения.

Автор благодарен О.В. Гендельману, Е.А. Зубовой, Ш.А. Шагиняну за техническую помощь и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.

2. *Пригожин И.*, *Стенгерс И.* Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.

3. *Пригожин И.*, *Стенгерс И.* Время, хаос. Квант. М.: Прогресс, 1994.

4. *Спиридонов О.П.* Л. Больцман. М.: Просвещение, 1987.

5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

6. *Форд Дж.* Случаен ли исход бросания монеты? // Физика за рубежом А. 1984.

7. *Маневич Л.И.* Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 1. С. 86–93.

8. *Маневич Л.И.* От теории возмущений к асимптотологии // Там же. № 9. С. 113–121.

9. *Гендельман О.В.*, *Маневич Л.И.* Нелинейная динамика двухатомной цепочки Тода и проблема теплопроводности в квазиодномерных кристаллах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1992. Т. 102, вып. 8.

* * *

Леонид Исакович Маневич, профессор Московского физико-технического института, зав. сектором Института химической физики РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика, асимптотические методы, физика полимеров, механика сплошной среды. Автор более 250 статей и девяти монографий.